13/10

Πρόταση

$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ και $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

Αν $A_1, \dots, A_k$ υποσύνολα ενός μ.χ.

$(\bigcap_{i=1}^{k} A_i)^\circ = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^\circ$ και $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}$

Πρόταση

Αν $A_i, i\in I$ οικογένεια υποσυνόλων ενός μ.χ. τότε:

(i) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ \supseteq \bigcup_{i\in I} A_i^\circ$ (α) $\overline{\bigcup_{i\in I}A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$

(ii) $(\bigcap_{i\in I} A_i)^\circ \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$ (β) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}\subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$

Απόδειξη

i) $(\forall i\in I)\ A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \xrightarrow{A\subseteq B \Rightarrow A^\circ\subseteq B^\circ} (\forall i\in I)\ A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i^\circ \subseteq (\bigcup_{i\in I}A_i)^\circ$

β) $(\forall i\in I)\ \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i \xrightarrow{A\subseteq B\Rightarrow \overline{A}\subseteq\overline{B}} (\forall i\in I)\ \overline{\bigcap_{i\in I}A_i}\subseteq \overline{A_i} \Rightarrow \bigcap$

$\Rightarrow \overline{\bigcap_{i\in I}A_i}\subseteq \bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$

Παρόμοια αποδεικνύονται και τα άλλα δύο

Εφαρμογές

$[\alpha,\beta]$ στον ευκλείδιο μ.χ. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $\alpha<x<\beta$

να βρεθούν $[\alpha,\beta)^\circ$, $[\alpha,\beta)^\circ$

$\frac{1}{2}\min\{x-\alpha, \beta-x\} = \kappa$ $\Rightarrow$

$[\alpha,\beta)^\circ \subseteq [\alpha,\beta)$

ΝΣ# $B(x,\kappa) = (x-\kappa, x+\kappa) \subseteq [\alpha,\beta)$

$\Rightarrow x$ είναι εσωτ. σημείο του $[\alpha,\beta)$

Επίσης $(\forall r>0)\ B(\alpha,r)\not\subseteq[\alpha,\beta) \Rightarrow \alpha$ δεν είναι εσωτ. σημείο του $[\alpha,\beta)$

Άρα $[\alpha,\beta)^\circ = (\alpha,\beta)$

• Ο πυρήνας ενός διαστήματος στην πραγμ. ευθεία στον ευκλείδιο μ.χ. είναι το διάστημα χωρίς τα άκρα.

~~$A \supseteq A \Rightarrow [\alpha,\beta]$~~

(16)

ii) $\bar{A} \supseteq A$, άρα $\overline{[\alpha,\beta)} \supseteq [\alpha,\beta)$

ΛΥΣΗ

β, $r>0$ με r τυχον

$B(\beta,r) = (\beta-r, \beta+r)$

$B(\beta,r) \cap [\alpha,\beta) = (\beta-r, \beta+r) \cap [\alpha,\beta) \neq \emptyset$

Άρα β είναι σημείο επαφής δηλ. $\beta \in \overline{[\alpha,\beta)}$

iii) $x<\alpha$ $(x>\beta)$

$r = \frac{\alpha - x}{2}$

ΛΥΣΗ

$\left.\begin{array}{l} B(x,r) = (x-r, x+r) \\ B(x,r) \cap [\alpha,\beta) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow x \notin \overline{[\alpha,\beta)}$

Άρα $\overline{[\alpha,\beta)} = [\alpha,\beta)$

ΑΣΚΗΣΗ

ν.δ.ο

i) $\overline{(\alpha,+\infty)} = [\alpha,+\infty)$

ii) $[\alpha,+\infty)^{\circ} = (\alpha,+\infty)$

Πχ

$A_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$, $\nu \in \mathbb{N}$

i) $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu = \{0\}$ (θέλει απόδειξη)

ii) $\left(\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu\right)^{\circ} = \{0\}^{\circ} = \emptyset$

iii) $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu^{\circ} = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)^{\circ} = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \{0\}$

$\left(\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu\right)^{\circ} = \emptyset \subset \{0\} = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu^{\circ}$

(E,ρ) διακριτός μ.χ. $A \subseteq E$, A°? Ισχύει $A^\circ \subseteq A$.

Θεωρώ $x \in A$ και $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A$. (Ισχύει $A^\circ \subseteq A$)

Άρα $x \in A^\circ$. Δηλ. $A \subseteq A^\circ$. Τελικά $A = A^\circ$

<u>Συμπέρασμα</u>: Στον διακριτό μ.χ. κάθε σύνολο ταυτίζεται στον πυρήνα του.

<u>Γενικά</u> όμως ισχύει $A \subseteq \overline{A}$.

Έστω $x \notin A$. $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$

$B(x,\frac{1}{2}) \cap A = \{x\} \cap A \overset{x \notin A}{=} \emptyset$

Το x δεν είναι σημείο επαφής δηλ. $x \notin \overline{A} \Longrightarrow A = \overline{A}$

Άρα στον διακριτό μ.χ. $A = A^\circ = \overline{A}$

<u>Άσκηση</u>

Έστω (E,ρ) τυχών μ.χ. κ $a \in E$. Ν.δ.ο. $\overline{\{a\}} = \{a\}$

Ισχύει $\{a\} \subseteq \overline{\{a\}}$. Έστω $x \neq a$ κ $x \in \overline{\{a\}}$ τότε

$(\forall \nu \in \mathbb{N})\, B(x,\frac{1}{\nu}) \cap \{a\} \neq \emptyset \Longrightarrow (\forall \nu \in \mathbb{N})\, a \in B(x,\frac{1}{\nu}) \Longrightarrow$

$(\forall \nu \in \mathbb{N}) : \rho(x,a) < \frac{1}{\nu} \Longrightarrow \rho(x,a) \leq \lim_{\nu \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu} = 0 \Longrightarrow \rho(x,a) = 0 \Rightarrow x = a$

ΑΤΟΠΟ

Παρατήρηση: Δεν ισχύει το ίδιο για τον πυρήνα

δηλ. $\{a\}^\circ \neq \{a\}$ $\forall$ μ.χ.

<u>Ορισμός</u>

(E,ρ) μ.χ. $A \subseteq E$

a σημείο συσσώρευσης του $A \Longleftrightarrow (\forall r>0) : \underline{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset$

$\left(\underline{B}(a,r) = B(a,r) - \{a\}\right)$

<u>Πρόταση</u>

Κάθε σημείο συσσώρευσης είναι και σημείο επαφής

$$\underline{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow[\underline{B}(a,r) \cap A \subseteq B(a,r) \cap A]{\underline{B}(a,r) \subseteq B(a,r) \Rightarrow} B(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

Επίσης, $A = (0,1) \cup \{2\}$ στον $(\mathbb{R}, |\,|)$

έχω $\overline{A} = \overline{(0,1) \cup \{2\}} = \overline{(0,1)} \cup \{2\} = [0,1] \cup \{2\}$

Το σημείο 2 είναι σημείο επαφής και δεν είναι σημ. συσ. γιατί $\exists\, \underline{B}(\frac{1}{2},2) \cap A = \emptyset$

(υπάρχει μία σφαιρική περιοχή του σημείου που είναι ξένη με A)

(18)

Ορισμός

α εξωτ. σημείο του $A \iff \alpha \in (A^c)^o = (\overline{A})^c$

Ορισμός

α συνοριακό σημείο του $A \overset{\text{ορ.}}{\iff}$ το α δεν είναι εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του A

Συμβολίζουμε: $\partial A \equiv$ σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A και

$extA \equiv$ σύνολο των εξωτ. σημείων του A και

$A' \equiv$ σύνολο των σ.σ. του A

Ισχύει: $\partial A = (A^o)^c \cap (extA)^c$